Definizione

Una funzione f definita in D (dominio) si dice **continua in un punto** $c \in D$ se esiste in tale punto (è cioè possibile calcolare $f(c)$); se esiste, finito, il limite della funzione per x che tende a c e se il valore del limite coincide con il valore della funzione nel punto c.

Si verificano cioè le tre condizioni:

1. esiste $f(c)$
2. esiste finito $\lim_{x \to c} f(x) = l$
3. $f(c) = l$

$$\text{cioè } \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Inoltre, una funzione f è continua in tutti punti di un intervallo I si dice **continua nell'intervallo**

Osservazioni:

- se una funzione f definita solo a destra o solo a sinistra del punto c è possibile verificare la sua continuità solo a destra o a sinistra se sono verificate , rispettivamente, le relazioni

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \text{ per la continuità a destra di c}$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \text{ per la continuità a sinistra di c}$$

- se una o più delle condizioni sopra scritte per la continuità venissero a mancare la funzione sarà dunque discontinua nel punto c considerato (che può non appartenere al dominio)

Punti di discontinuità

Per completare il discorso sulla continuità chiariamo bene il concetto di **punto di discontinuità**. In tale punto una delle tre condizioni citate sopra (vedi definizione di continuità) viene a cadere cioè si verifica una o più delle seguenti circostanze:

- esistono f(c) e $\lim_{x \to c} f(x)$ ma non sono uguali fra loro
- il $\lim_{x \to c} f(x)$ non è finito
- la funzione non è definita nel punto c ma esiste il $\lim_{x \to c} f(x)$

Noi siamo in grado di riconoscere diverse specie di punti di discontinuità a seconda della circostanza che si verifica e quindi diciamo che:

Definizione

1. Si dice che una funzione f definita in D ha in $c \in D$ (può anche essere $c \notin D$) un **punto di discontinuità di prima specie** se esistono finiti il limite destro e sinistro in c ma non coincidono tra loro, in particolare la differenza fra i due limiti (in valore assoluto) è detta salto.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$

$$\left| \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) \right| = s$$

La funzione ha un **grafico** che presenta salti come la seguente:

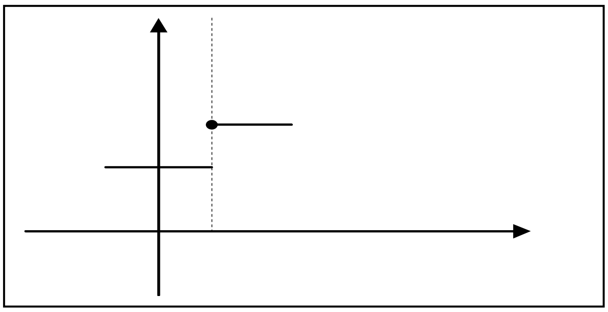


Figura 1A: In corrispondenza del punto di discontinuità (salto) la funzione è definita ma i limiti non sono uguali fra loro.

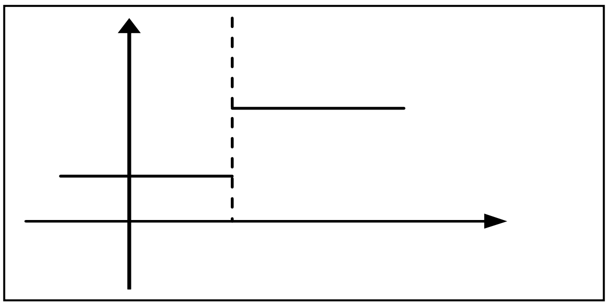


Figura 1B: In corrispondenza del punto di discontinuità (salto) la funzione non è definita e i limiti non sono uguali fra loro.

Definizione

2. Si dice che una funzione f definita in D ha in c un punto **di discontinuità di seconda specie** se la funzione non è definita nel punto e non sono finiti il limite destro e sinistro per x che tende a c. Cioè $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

Osservazione: si può affermare che se la funzione ha discontinuità di seconda specie in un punto c , in tale punto ammette l'asintoto verticale x=c. La definizione afferma infatti che "**la retta x=c è asintoto verticale per la funzione y=f(x) se il** $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$. "

Il **grafico** che la rappresenta è quello della figura 2. In tal caso $\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ e la retta x=3 è asintoto verticale.

Può anche verificarsi che i limiti siano entrambi +∞ o entrambi -∞ (anche in tal caso si ha asintoto verticale)

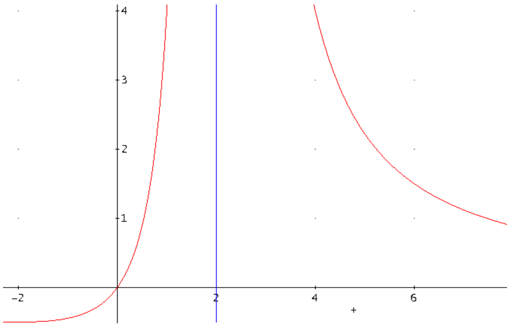


Figura 2: funzione con discontinuità di seconda specie, limite infinito e asintoto la retta

Definizione

3. Si dice che una funzione f definita in D ha in c∈D un **punto di discontinuità di terza specie** se esiste finito il limite per x che tende a c ma non coincide con il valore della funzione nel punto (che può assumere un valore diverso dal limite o non essere definita).

Questo è un tipo di discontinuità **eliminabile** cioè è possibile rendere continua una funzione che presenta un punto di discontinuità di terza specie.

Se consideriamo infatti la funzione $f(x) = \frac{senx}{x}$ definita per tutti gli x≠0 ha in tale punto una discontinuità di terza specie infatti: in x=0 la funzione non è definita ma esiste, finito, il $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$ (limite notevole calcolabile anche con il teorema De l'Hospital). Ridefinendo quindi la funzione nel seguente modo $f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x} & \text{per x} \neq 0 \\ 1 & \text{per x} = 0 \end{cases}$ si ottiene una funzione continua su tutto R.

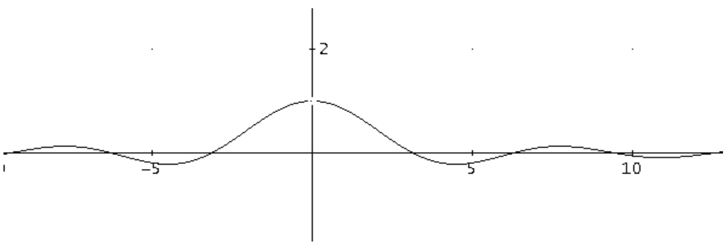


Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = \frac{senx}{}$

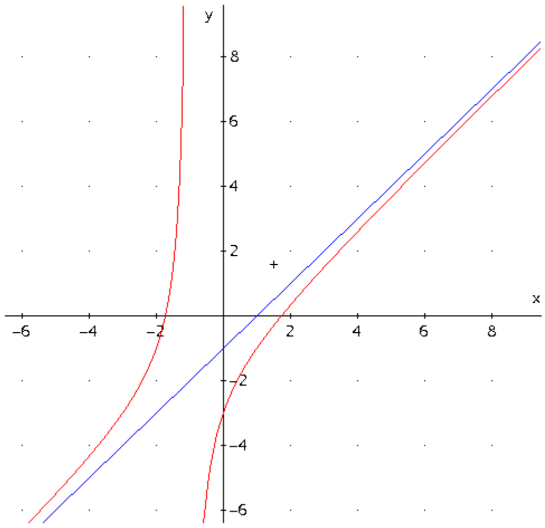
ASINTOTI: definizioni

Un asintoto è una retta a cui una curva si avvicina indefinitamente. Supponendo che tale curva sia il grafico di una funzione y=f(x), preso un punto sul grafico, la distanza fra il punto e la retta tende a zero.

In analisi si dice che:

- la retta x=c è asintoto VERTICALE per la funzione y=f(x) definita in un intorno di c se il $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.
- la retta y=l è asintoto ORIZZONTALE per la funzione y=f(x) definita in un intorno di ∞ se il. $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ finito
- la retta y=mx+q è asintoto OBLIQUO per la funzione y=f(x) definita in un intorno di ∞ se il $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ diverso da 0 e infinito} \\ \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = q \text{ diverso da infinito} \end{cases}$.

Come esempio di asintoto verticale si veda la figura 2 e per l'orizzontale la 3, per quello obliquo la figura a lato.



Limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Intanto si può notare che il limite si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e quindi per essere risolto facciamo alcune considerazioni geometriche osservando la figura, tracciando un angolo di ampiezza x radianti si ha: $\overline{PH} < AP < \overline{AT}$ che equivale a dire $\sin x < x < \tan x$. Poiché l'angolo considerato è positivo e quindi sin x è positivo, posso divedere tutti i membri di questa catena di disuguaglianze per sin x senza cambiare il verso ottenendo: $\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ cioè $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ a questo punto essendo tutti i termini positivi posso passare ai reciproci[1] cambiando il verso della disuguaglianza e ottengo $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Se faccio tendere a zero la x il primo e l'ultimo termine di questa disuguaglianza tendono a 1 e dunque, per il teorema del confronto, anche $\frac{\sin x}{x}$ tende a 1 . Lo stesso può dimostrarsi in modo analogo per gli x negativi.

LIMITI CORRELATI

$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ con f(x)=y; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^n x}{x^n} = 1$ con $\frac{\sin^n x}{x^n} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^n}{x^n} = 1$ con x^n=y

Limiti notevoli che utilizzano quello precedente:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ 2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

---

[1] Se a>b>0 allora $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

1. il limite si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ quindi moltiplico, per risolverla, per (1+cos x) sia il numeratore che il denominatore. Ottengo così:

$$\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

dunque $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0$

2. anche questo si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ quindi moltiplico, per risolverla, per (1+cos x) sia il numeratore che il denominatore. Ottengo così:

$$\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

dunque $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ non dimostrato (e numero di Nepero)

NOTA importante: cambiando la variabile nel limite notevole cioè ponendo $x=\frac{1}{y}$ o anche $y=\frac{1}{x}$ si ha che se x tende all'infinito y tende a zero dunque il limite si può riscrivere così $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$

LIMITI CORRELATI

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

1. il limite si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ quindi lo riscrivo

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\ln(1+\frac{1}{y})^y=\ln e=1$ con il cambio di variabile $\frac{1}{x}=y$

2. il limite si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ quindi lo riscrivo ponendo e^x=y cioè x=lny

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln y}=$ *ponendo* y - 1 = t ottengo $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=1$ perchè reciproco del precedente

Limiti di funzioni razionali fratte

$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$ F.I. in tal caso significa che c annulla entrambi i polinomi quindi il fattore (x-c) va raccolto e semplificato perché presente in entrambi. Si toglie così la forma indeterminata

$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ F.I. in tal caso raccolgo la x a grado massimo presente in tutti e 2 i polinomi ottenendo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+..........\right)}{x_m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\frac{b_{m-2}}{x^2}+..........\right)}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_n}{b_m}\quad\begin{cases}n>m\ \text{il limite si comporta come } x^k \text{ quindi}=\infty\\ n=m\ \text{il limite vale}\ \frac{a_n}{b_m}\\ n<m\ \text{il limite si comporta come}\ \frac{1}{x^k}\ \text{quindi}=0\end{cases}$$

Definizioni fondamentali

- Una funzione si dice *infinitesima*, per *x* tendente a *c*, se $\lim_{x\to c} f(x)=0$
- Una funzione si dice *infinita*, per *x* tendente a *c*, se $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$.
- Date due funzioni *f* e *g*, entrambe infinitesime per *x* tendente a *c*, si dice che:
    - *f* è infinitesimo di ordine superiore a *g* se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
    - *f* è infinitesimo di ordine inferiore a *g* se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$
    - *f* è infinitesimo dello stesso ordine di *g* se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ diverso da 0 e infinito
- Date due funzioni *f* e *g*, entrambe infinite per *x* tendente a *c*, si dice che:
    - *f* è infinito di ordine superiore a *g* se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$
    - *f* è infinito di ordine inferiore a *g* se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
    - *f* è infinito dello stesso ordine di *g* se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ diverso da 0 e infinito

Si noti che, per gli infinitesimi, essere di *ordine superiore* significa essere, in un intorno di *c*, "infinitamente più piccolo", mentre per gli infiniti essere di *ordine superiore* significa essere, in un intorno di *c*, "infinitamente più grande"; il contrario per il concetto di *ordine inferiore*.

Principio di sostituzione

L'applicazione dei concetti sopra introdotti al calcolo dei limiti si basa sul cosiddetto principio di sostituzione.

In sostanza il teorema afferma che, nel calcolo del limite di un rapporto di infinitesimi o di infiniti si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore e gli infiniti di ordine inferiore. Si tratta di un teorema che, se ben applicato, consente notevoli semplificazioni nel calcolo dei limiti.